MÚSICA FRACTAL: EL SONIDO DEL CAOS

Juan Antonio Pérez Ortiz
japerez@dlsi.ua.es

Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos
Universidad de Alicante

Mayo 2000

A pesar de que la historia de los fractales comienza en los últimos días del siglo XIX, gran parte del XX permanece ajena a ellos. En las últimas décadas del siglo, y casi paralelamente a la evolución de la investigación en sistemas caóticos, los fractales cobran un auge creciente, hasta convertirse en un concepto cada vez más extendido en todas las ciencias.

Este trabajo es una introducción a la teoría de la geometría fractal y a una de sus aplicaciones más recientes: la música fractal. La geometría fractal no solo puede estimular los sentidos a través de la generación de impresionantes paisajes virtuales, sino también por medio de melodías desafiantes.

En la sección 1 mostraremos algunos de los fractales más famosos. A continuación, en la sección 2, abordaremos brevemente la aparición del caos en sistemas dinámicos y el importante descubrimiento que supone la constante de Feigenbaum. En la sección 4 descubriremos uno de los más bellos y complejos objetos matemáticos, el conjunto de Mandelbrot, que puede considerarse una enciclopedia en la que cada una de sus entradas es un conjunto de Julia de los que se discuten en la sección 3.

La sección 5 presenta los sistemas L, una forma sencilla de construir gráficamente fractales. Después de esta sección, el resto del trabajo discute los fundamentos de la música fractal. En la sección 6 se analiza brevemente la relación entre ciencia y música. Después, se presenta a algunos compositores de música fractal en la sección 8. Las secciones entre la 9 y la 12 tratan sobre la forma de componer música fractal a partir de series numéricas autosemejantes, atractores extraños, sistemas L y el conjunto de Mandelbrot. Para cada uno de estos casos se introducen cuatro programas de composición: Musinum, The Well Tempered Fractal, LMuse y Gingerbread, respectivamente.

En la dirección `http://www.dlsi.ua.es/~japerez/fractal` se encuentra, además de este trabajo, los programas de generación de música fractal señalados y ejemplos de melodías compuestas con su ayuda.

Los objetivos de este trabajo son puramente descriptivos por lo que se omitirá toda demostración de los resultados obtenidos.

1. Monstruos matemáticos

A finales del siglo pasado, el matemático Charles Hermite tildaba de «plaga lamentable» la fascinación que algunos matemáticos sentían por determinadas curvas que desafiaban los cimientos de la geometría de la época. Muchos como él consideraban patológicas aquel tipo de curvas y se desentendían de sus insólitas propiedades. Uno de aquellos primeros monstruos geométricos era el denominado conjunto de Cantor. Su definición es muy sencilla: se toma un segmento de determinada longitud (por ejemplo el intervalo $[0, 1]$ de la recta real) y se divide en tres subsegmentos de igual longitud, se suprime el segmento central y el proceso se repite con los dos nuevos segmentos resultantes. El resultado de iterar este proceso infinitas veces es el conjunto de Cantor.

Ahora bien, ¿tiene elementos el conjunto de Cantor? Un espectador infinitesimal que contemplase la iteración anterior durante una eternidad, ¿no terminaría por ver desaparecer la totalidad de los puntos? Puede demostrarse que no, pero el consolidado sistema de medidas de la época (medida Lebesgue) daba para dicho conjunto longitud nula. Tarde o temprano se tuvo que aceptar que aquel sistema de medidas era insuficiente.

En 1890, Peano ideó otro de tales monstruos: una curva que rellenaba el plano ¿Cómo podía una región cuadrada del plano ser una curva? Años más tarde, Hilbert ideó una curva con idéntica propiedad pero de más sencilla elaboración.

Otro ejemplo lo constituye la curva ideada por el matemático sueco Helge von Koch en 1904. Un segmento se divide en tres partes iguales, sustituyendo la central por los dos segmentos que junto a dicha parte formarían un triángulo equilátero. El proceso se repite *ad infinitum* con los cuatro segmentos resultantes. La curva de Koch oculta otra característica sorprendente: un perímetro infinito aloja un área finita.

Todas estas formas que se retuercen sobre sí mismas terminaron por revolucionar muchos de los conceptos dados por válidos hasta el siglo pasado y desembocaron en la denominada teoría geométrica de la medida, desarrollada en las primeras décadas de nuestro siglo. Uno de los aspectos más relevantes surgidos de esta teoría es la redefinición del concepto de dimensión a cargo de Hausdorff, que permite que estas curvas tengan dimensión fraccionaria. Así la curva de Koch tiene una dimensión de Hausdorff de 1,2618 lo cual indica que está más cerca de ser una recta (dimensión 1) que un área (dimensión 2). La curva de Hilbert, por tanto, tiene una dimensión de Hausdorff de 2. Los trabajos de Haussdorf fueron continuados durante la década de los años 20 por Besicovitch y derivaron en la teoría geométrica de la medida.

Hoy en día todas las curvas anteriores se incluyen dentro de una clase más amplia de objetos matemáticos denominados *fractales*. El término fue acuñado por Benoit Mandelbrot (descubridor de uno de los más bellos y complejos conjuntos matemáticos, que lleva su nombre) hace apenas veinte años como un neologismo derivado de la palabra latina *fractus*.[1] Queda aún por establecer una definición exacta y definitiva del término. Sin embargo, de algo no hay duda: las curvas descritas anteriormente son genuinamente fractales.

1.1. Fractales

Básicamente los fractales [1, 9, 12] se caracterizan por dos propiedades: *autosemejanza* (o *autosimilitud*) y *autorreferencia*. La autorreferencia determina que el propio objeto aparece en la definición de sí mismo, con lo que la forma de generar el fractal necesita algún tipo de algoritmo recurrente. La autosemejanza implica *invarianza de escala*, es decir, el objeto fractal presenta la misma apariencia independientemente del grado de ampliación con que lo miremos. Por más que se amplíe cualquier zona de un fractal, siempre hay estructura, hasta el infinito y aparece muchas veces el objeto fractal inicial contenido en sí mismo.

De todas formas, no fue hasta los años 70 que comenzaron a vislumbrarse las aplicaciones de los fractales. En su tan citada obra *The Fractal*

[1]Aunque Madelbrot definió el sustantivo *fractal* con genero femenino, son raras las referencias en castellano que se refieren a *las fractales* y gran mayoría las que lo hacen a *los fractales*. Por ello, y siguiendo esta tendencia, utilizaremos en esta obra el genero masculino.

Geometry of Nature,[2] Mandelbrot razonó que la naturaleza entiende mucho más de geometría fractal que de geometría diferenciable. La geometría fractal aborda el estudio de formas geométricas no diferenciables o quebradas a cualquier escala que se miren. La geometría diferenciable, por otra parte, asume que a pequeña escala formas que no lo son se suavizan, con lo que se pierde la perspectiva global del objeto. La geometría fractal ofrece un modelo alternativo que busca una regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas. El objeto se expresa como el límite de un proceso geométrico iterativo, el cual puede provocar en cada iteración una ruptura (fractura o quebramiento) de la suavidad, que lleva a la ausencia de diferenciabilidad en el objeto límite.

También fue crucial la publicación por Hutchinson en 1981 de un trabajo en el que se desarrolla el concepto de conjunto autosemejante, de gran trascendencia en el desarrollo posterior de la geometría fractal.

A partir de ahí, muchos científicos han encontrado fractales en sus campos de estudio (el título de uno de los libros sobre el tema es bastante sugerente, *Fractals Everywhere* [1]). La distribución de las galaxias, los procesos físicos de ramificación, agregación y turbulencia, la aparición de ruido en señales eléctricas (con una distribución similar al conjunto de Cantor) e incluso los fenómenos económicos o sociológicos son algunos de los lugares en los que se esconde el serpenteo incansable de los fractales.

Resulta curioso que los matemáticos que sentaron las bases de la teoría geométrica de la medida a comienzos de este siglo, lo hicieron desde un punto de vista completamente teórico, sin intuir las tremendas consecuencias que sus trabajos tendrían varias décadas después en multitud de disciplinas científicas. Aunque no es correcto atribuir a Mandelbrot la paternidad de la geometría fractal, no puede negarse su vital aportación al renacimiento de esta y su visión de la potencia de los fractales para modelizar la realidad.

1.2. La naturaleza es fractal

Es muy común encontrar afirmaciones como la que titula este apartado en la literatura sobre el tema. Sin embargo, es necesario advertir aquí que, realmente, *la naturaleza no es fractal*. Cuando decimos que un objeto real como una costa o la red capilar del sistema venoso es un fractal estamos queriendo decir que existe un modelo fractal que aproxima con bastante precisión dicho objeto.

[2] Editada en castellano en 1997, veinte años después de su publicación original, por la editorial Tusquets.

En el mundo real no existen fractales, como tampoco existen rectas ni esferas. Hablar de la dimensión fractal de una costa no es más absurdo que hablar del radio de la Tierra. La ciencia avanza gracias a todas estas aproximaciones, aunque probablemente las cosas no comprendan en su esencia nuestros modelos matemáticos.

Los fractales, además, abren la puerta a numerosas conjeturas sobre la complejidad del mundo. Las pautas de generación de fractales son extremadamente sencillas si se comparan con los resultados obtenidos. Es posible que numerosos comportamientos de la naturaleza que hoy día se nos antojan extremadamente complicados respondan de igual forma a mecanismos de enome sencillez. La geometría fractal es una rama muy joven cuyos progresos deben repercutir en una creciente utilidad para el estudio de la realidad.

1.3. El conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es un ejemplo clásico de conjunto no numerable con el mismo cardinal que el continuo, pero, a pesar de ello, con medida de Lebesgue unidimensional (longitud) nula.

Para construir el conjunto de Cantor [9] partiremos del intervalo unidad $E_0 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Dividimos dicho intervalo en tres partes iguales y consideramos los intervalos cerrados de los extremos

$$E_{11} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \qquad E_{12} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

cada uno de ellos de longitud $1/3$.

El proceso anterior se repite sobre los nuevos conjuntos obtenidos. Cada uno de estos intervalos se divide en tres intervalos de igual longitud para prescindir del intervalo central y considerar los cuatro intervalos cerrados

$$E_{21} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \quad E_{22} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \quad E_{23} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \quad E_{24} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

cada uno de ellos de longitud $1/9$.

Si continuamos indefinidamente de esta forma, en la etapa k-ésima tendremos 2^k intervalos cerrados E_{kj} con $j = 1, 2, \ldots, 2^k$, cada uno de ellos de longitud 3^{-k}.

Consideremos ahora para cada $k = 1, 2, \ldots$ el conjunto

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} E_{kj}$$

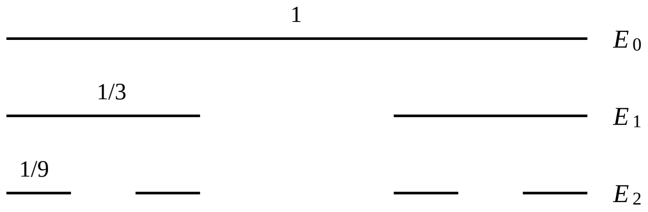


Figura 1: El conjunto ternario de Cantor se obtiene de manera inductiva comenzando por el segmento unidad y quitando en cada etapa a cada intervalo el segmento medio resultante de dividirlo en tres partes iguales.

Observamos que los conjuntos E_k, $k = 1, 2, \ldots$, forman una sucesión monótonamente decreciente, esto es

$$E_{k+1} \subset E_k \quad \forall k$$

El conjunto límite de este proceso

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

se denomina *conjunto ternario de Cantor*. En la figura 1 se muestran las primeras etapas de la generación del conjunto de Cantor.

Las propiedades asombrosas de este conjunto son abundantes. Veamos unas cuantas. En primer lugar observamos que E no es vacío ya que en cada E_k están, como mínimo, los extremos de los 2^k intervalos cuya unión nos da E_k y, por lo tanto, también están en E. Además, el conjunto de Cantor es cerrado por ser intersección de cerrados.

Con todo, estos no son los únicos puntos de E; si así fuera, se trataría de un conjunto numerable. Pero E es no numerable. Veámoslo.

Cada punto de E es representable de forma única mediante

$$a = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots$$

donde cada a_i es 0 ó 2. Podemos entonces escribirlo en base tres como

$$a = 0, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$$

Recíprocamente, cada expresión de este tipo corresponde a un punto de E. Si E fuera numerable[3] podríamos ordenar sus elementos. Supongamos

[3] Un conjunto es *infinito* si tiene el mismo cardinal que una parte estricta suya, esto es, si puede establecerse una aplicación biyectiva entre el conjunto y un subconjunto propio suyo. Un conjunto infinito es *numerable* si tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$. Cantor demostró que $\mathbb{Q}$ es numerable y que $\mathbb{R}$ no es numerable.

que es cierto lo anterior y que E es numerable

$$a^1 = 0, a_1^1\, a_2^1 \dots$$
$$a^2 = 0, a_1^2\, a_2^2 \dots$$
$$a^3 = 0, a_1^3\, a_2^3 \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

y formemos un punto $0, b_1 b_2 \dots$ a partir de la sucesión anterior con la regla siguiente

$$\begin{array}{ll} \text{si } a_n^n = 0, & b_n = 2 \\ \text{si } a_n^n = 2, & b_n = 0 \end{array}$$

El número así formado no está en la sucesión anterior; sin embargo, pertenece claramente a E y, por tanto, E no puede ser numerable. Este procedimiento es muy similar a la famosa técnica utilizada por Cantor para demostrar la no numerabilidad de $\mathbb{R}$.

Aunque aquí no lo demostraremos, puede comprobarse, además, que el conjunto E no contiene intervalos, es decir, es infinitamente poroso.

1.4. Curvas de Peano y Hilbert

En 1890 Peano construyó una curva continua que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad $[0,1]^2$. Era el primer ejemplo de una curva que llena un espacio. Años más tarde, Hilbert construye otra del mismo tipo con una construcción geométrica más simple de describir.

La curva de Hilbert se construye iterando el procedimiento que puede observarse en la figura 2. En cada etapa cada segmento se sustituye por otros cuatro con la mitad de longitud. La curva límite de tales poligonales llena el cuadrado unidad.

1.5. Curva de Koch

Esta curva fue construida en 1904 por el matemático Helge von Koch. Se parte del segmento unidad $[0,1]$ y se divide en tres partes iguales, sustituyendo la parte central por los dos segmentos que junto con dicha parte formarían un triángulo equilatero. Con cada uno de los cuatro segmentos que así queden determinados se repite la operación anteriormente descrita.

Se procede indefinidamente de esta forma obteniendo en cada etapa k una poligonal de longitud $(4/3)^k$. La curva de Koch se define como la curva

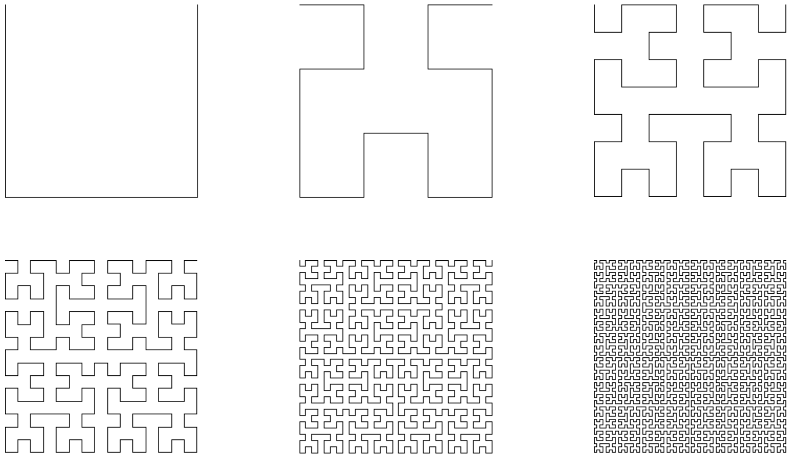


Figura 2: Primeras etapas de la generación de la curva de Hilbert. La curva de Hilbert es un ejemplo de curva que llena el plano, por lo que su dimensión fractal es 2.

Figura 3: Primeros pasos del proceso de construcción de la curva de Koch. En el límite, dados dos puntos cualesquiera de la curva es imposible llegar a uno de ellos desde el otro por encima de la curva. La longitud de cualquier tramo de curva es infinita.

límite a que converge la sucesión cuando k tiende a infinito. Se trata, por tanto, de una curva de longitud infinita pues $(4/3)^k$ tiende a infinito con k. Más aún, la longitud de la parte de curva comprendida entre dos puntos cualesquiera de la misma también es infinita. El área bajo la curva, por otra parte, viene dada por la serie

$$1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots$$

que converge a 9/3 asumiendo que el área bajo el triángulo de la primera iteración es 1. En la figura 3 pueden verse las primeras etapas de la generación de la curva de Koch.

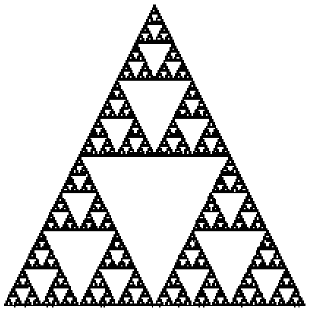


Figura 4: Imagen final aproximada del triángulo de Sierpinski. Sabiendo que el conjunto inicial es un triángulo equilatero relleno, no es difícil deducir el proceso iterativo que permite obtener el fractal.

1.6. Otros fractales

Los apartados anteriores han mostrado algunos conjuntos fractales de reconocida fama y prestigio. Sin embargo, no son, ni mucho menos, los únicos.

La figura 4 muestra el triángulo de Sierpinski. Este fractal se genera a partir de un triángulo equilatero relleno de lado l del que se extrae el subtriángulo formado por los tres puntos medios de los lados del triángulo. El proceso se repite con los tres nuevos triángulos de lado $l/2$ así obtenidos. Si continuamos de esta manera, en la etapa k tendremos 3^k triángulos equilateros con lados de longitud $l2^{-k}$. La figura 4 muestra el conjunto obtenido.

El proceso seguido para la construcción del conjunto de Cantor puede generalizarse a dimensiones superiores. La generalización a tres dimensiones produce la denominada *esponja de Menger* que puede verse en la figura 5.

Unos años antes de los primeros desarrollos de Mandelbrot, algunos científicos comenzaron a ponerse de acuerdo en la explicación de ciertos fenómenos irregulares que surgían en multitud de sistemas dinámicos. Eran los primeros intentos de descubrir algunos viejos trucos de magia de la naturaleza.

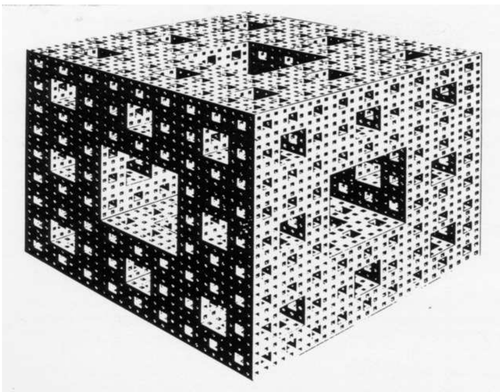


Figura 5: Esponja de Menger. Puede considerarse una generalización del conjunto de Cantor. Se comienza por un cubo y se divide en 27 cubos más pequeños, extrayendo el cubo central y los situados en el centro de cada cara del cubo original. El proceso se repite con cada uno de los cubos restantes y así sucesivamente. La dimensión de la esponja de Menger es $2,727$ lo que indica que está más cerca de ser un cuerpo solido que una curva suave.

2. El caos y el orden

El descubrimiento y formalización del caos se ha dado en considerar como una de las últimas revoluciones en la Física del siglo XX, comparable a la que en su día provocaron la relatividad y la teoría cuántica.

Un sistema dinámico (siempre no lineal) se considera caótico [13, 17] si presenta un comportamiento aperiódico (esto es, resultado de oscilaciones regulares que no se repiten nunca, de periodo infinito) resultado de un modelo totalmente determinista y que presenta gran *sensibilidad a las condiciones iniciales.*

La sensibilidad a las condiciones iniciales implica que existe una divergencia exponencial de trayectorias inicialmente muy próximas en el espacio de fases, fenómeno que se conoce como *estirado.* Otra propiedad existente sobre el espacio de fases y opuesta al estirado es el *plegamiento* que conlleva que dos trayectorias muy lejanas pueden eventualmente acercarse.

Si representamos el retrato de fase de un sistema dinámico, veremos que las dos fuerzas anteriores entran en acción de forma que se genera una estructura confinada en una región del espacio de fases que se conoce como *atractor extraño.* Antes del descubrimiento del caos, los ciclos límite eran los atractores más complejos que se conocían. Hoy día se puede decir que cada sistema caótico lleva asociado un atractor de características peculiares.

Las trayectorias del espacio de fases nunca intersectan entre sí, pues esto supondría un comportamiento periódico. Como la región en la que está ubicado el atractor es finita, se tiene, al seguir una trayectoria cualquiera, una curva de longitud infinita encerrada en un área finita o, dicho de otra forma, un atractor extraño posee estructura *fractal.*

El ordenador facilita el proceso iterativo de los sistemas dinámicos y es un arma imprescindible para aproximarse a la geometría de los atractores extraños.

2.1. Duplicación de periodo y constante de Feigenbaum

La ecuación logística se ha convertido en la manera usual de introducir las características del caos. Se trata de una ecuación en diferencias que fue formulada por Verhulst en el siglo pasado para explicar el crecimiento de una población perteneciente a la misma especie y que se reproduce en un entorno cerrado sin ningún tipo de influencia externa. Pese a su aparente sencillez, constituye un buen ejemplo para mostrar el comportamiento de los sistemas caóticos. La ecuación se puede escribir como

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

donde el parámetro r es una constante denominada *parámetro de crecimiento* (generalmente entre 0 y 4) y la variable x_n puede verse como la fracción máxima de población que el ambiente puede soportar en el instante t_n. Considerando que la población límite

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$$

existe, queremos investigar la forma en la cual x_∞ depende del parámetro de crecimiento r. Si estudiamos experimentalmente el sistema, observaremos que para valores de $r < 3$ el sistema converge a un punto fijo estable, que es cero cuando $r < 1$. Cuando r llega a 3, el punto fijo se hace inestable y el valor de x_∞ oscila entre dos valores; se ha obtenido lo que se conoce como una *duplicación de periodo.*

Si se aumenta r ligeramente, por ejemplo $r = 3{,}44\ldots$, el número de puntos sobre los que oscila x_∞ es de 4. Si se sigue aumentando el valor de r, aparece una nueva duplicación de periodo para $r = 3{,}544\ldots$ y se obtiene un periodo de 8. Y así sucesivamente hasta llegar a obtener una sucesión de infinitos valores para x_∞ correspondiente al caos. Nótese cómo los valores de r para los que se producen las sucesivas duplicaciones de periodo están cada vez más cerca unos de otros.

El comportamiento de la ecuación logística en función de r puede observarse visualmente a través de un *diagrama de bifurcación.* En el eje horizontal

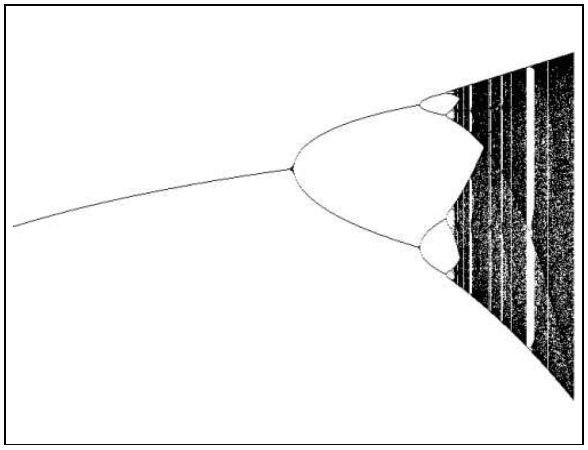


Figura 6: Diagrama de bifurcación de la ecuación logística $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ en el rango $2 \leq r \leq 4$. Puede observarse la ruta del caos: sucesivos desdoblamientos de periodo que desembocan en un periodo infinito.

se representa un cierto intervalo de valores de r y entonces se dibujan los valores de x_∞ generados por la iteración en el eje vertical. La figura 6 muestra el diagrama de bifurcación de la ecuación logística en el rango $2 \leq r \leq 4$.

La duplicación de periodo es un signo ineludible del comportamiento caótico de un sistema. Son muchos, y cada día más, los sistemas dinámicos en los que se observa este fenómeno y que desembocan, variando alguno de sus parámetros, en caos. Es más, un famoso artículo publicado en los inicios de la teoría del caos demostró que cualquier sistema en el que, para algún valor de sus parámetros, se registrara una periodicidad de periodo 3, desembocará para otros valores de sus parámetros en comportamiento caótico.

Lo anterior hace pensar en una universalidad del caos todavía no muy bien conocida que hace que sistemas muy diferentes muestren pautas similares de comportamiento. Un hecho que vino a corroborar esto y a mostrarnos que existe un cierto orden en el caos fue el descubrimiento por parte de Feigenbaum a mediados de los setenta de la constante que lleva su nombre. Una vez obtenido el diagrama de bifurcación de la ecuación logística, se puede calcular el incremento del parámetro entre dos bifurcaciones contiguas

$$\Delta i = r_i - r_{i-1}$$

y dividiendo por el incremento en el siguiente intervalo

$$\frac{\Delta i}{\Delta i + 1} = \frac{r_i - r_{i-1}}{r_{i+1} - r_i}$$

Feigenbaum encontró que la fracción anterior convergía hacia un valor determinado al ir aumentando i, de modo que en el límite se obtenía

$$\delta = \lim_{i\to\infty} \frac{\Delta i}{\Delta i + 1} = 4{,}66920160910299067185320382046 62\ldots$$

Feigenbaum calculó el límite anterior para otras ecuaciones en diferencias y obtuvo el mismo valor para δ. Posteriormente se ha encontrado el mismo valor de δ en algunos sistemas continuos e incluso en sistemas experimentales, todos de muy diversa procedencia. Hoy sabemos que δ, conocida como *constante de Feigenbaum*, es una constante universal tan fundamental como π o e, que ha provocado una nueva forma de ver el mundo.

El comportamiento caótico descrito anteriormente no solo surge bajo sistemas discretos. Multitud de sistemas dinámicos de ecuaciones diferenciales presentan fenómenos caóticos que generan atractores extraños. Por mostrar uno de ellos, veremos como el caos puede anidar incluso en sistemas clásicos aparentemente sencillos.

2.2. Ecuación forzada de Duffing

La ecuación diferencial de segundo orden

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \beta x^3 = 0$$

puede utilizarse para modelar las vibraciones libres amortiguadas por la velocidad de una masa m sobre un muelle no lineal como se muestra en la figura 7. El término kx representa la fuerza ejercida sobre la masa por un muelle lineal, mientras que el término βx^3 representa la no linealidad de un muelle real.

Vamos a analizar las vibraciones forzadas que resultan cuando una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$ actúa sobre la masa. Con esta fuerza sumada al sistema obtenemos la ecuación forzada de Duffing

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \beta x^3 = F_0 \cos \omega t$$

para el desplazamiento $x(t)$ de la masa de su posición de equilibrio. Para simplificar el modelo supondremos que $k = -1$ y que $m = c = \beta = \omega = 1$, con lo que la ecuación diferencial es

$$\ddot{x} + \dot{x} - x + x^3 = F_0 \cos t.$$

Pasando el sistema anterior a variables de estado obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1 - x^2) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \cos t \end{pmatrix}$$

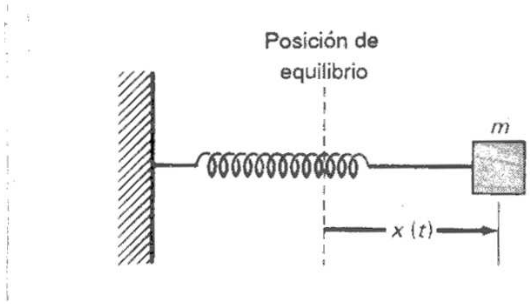
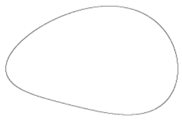
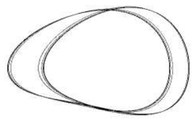


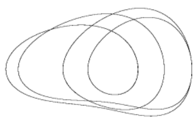
Figura 7: Cuando se considera que la fuerza ejercida por un muelle sobre una masa m no sigue la ley de Hooke, sino que esta fuerza es función no lineal de x y, además, hacemos que una fuerza externa actúe sobre la masa, el sistema puede comportarse de forma caótica.



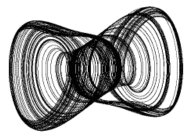
(a) $F_0 = 0{,}6$



(b) $F_0 = 0{,}7$



(c) $F_0 = 0{,}75$



(d) $F_0 = 0{,}8$

Figura 8: Ruta hacia el caos de la ecuación forzada de Duffing. Las figuras muestran las duplicaciones de periodo directamente sobre el atractor extraño (también podría haberse hecho con un diagrama de bifurcación). En algún punto entre $F_0 = 0{,}75$ y $F_0 = 0{,}8$ el caos irrumpe en el sistema obligándolo a un comportamiento aperiódico. Las duplicaciones de periodo respetan la constante de Feigenbaum.

que puede integrarse mediante el método de Euler para obtener el retrato fase asociado al sistema.

Variando el valor de F_0 cuidadosamente desde $F_0 = 0{,}6$ a $F_0 = 0{,}8$, como en la figura 8, pueden observarse las sucesivas duplicaciones de periodo que llevan al caos. Es curioso que aunque esta ecuación se estudió durante décadas, sin ordenadores nadie pudo vislumbrar en ella los signos del caos.

3. Conjuntos de Julia

En las secciones anteriores hemos estudiado la evolución de sistemas dinámicos sobre el plano real. Sin embargo, algunos de los resultados más espectaculares obtenidos con la iteración de un sistema dinámico se dan cuando consideramos funciones de variable compleja. Esta espectacularidad se muestra en dos frentes distintos: el estético y el matemático.

La teoría de sistemas dinámicos complejos data de comienzos de este siglo, con los trabajos de los matemáticos franceses Gaston Julia y Pierre Fatou. Aquí nos centraremos en el estudio de sistemas dinámicos complejos cuadráticos. La discusión de otros sistemas se sale del objetivo de esta introducción.

Podemos definir el conjunto de Julia [9] de un polinomio de variable compleja como la frontera del conjunto de puntos que escapan al infinito al iterar dicho polinomio. Esto significa que la *órbita* de un elemento del conjunto de Julia no escapa al infinito, pero existen puntos arbitrariamente cerca de él que sí lo hacen. La órbita o *trayectoria* de un punto x bajo un sistema dinámico de función f es la sucesión de puntos $\{f^n(x)_{n=0}^{\infty}\}$.

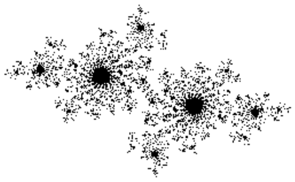
Para simplificar las cosas nuestro estudio girará en torno a funciones polinómicas cuadráticas de la forma:

$$f(z) = z^2 + c$$

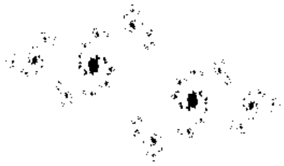
donde c y z son números complejos. A pesar de su sencillez, la iteración de la función anterior genera estructuras muy complicadas, hecho este que ya fue vislumbrado por Julia y Fatou a comienzos de siglo.

Los valores de z que no tienden a infinito los representaremos dibujando en negro su pixel asociado. Con este procedimiento se han obtenido los conjuntos de la figura 9. Como se dijo antes, es la frontera de las regiones dibujadas en negro lo que constituye realmente el conjunto de Julia. A la región completa se le suele denominar *conjunto de Julia relleno*.

Aunque algunos matemáticos intuían la diversidad de conjuntos de Julia que se derivaba de la utilización de distintos valores para c, la llegada de los primeros ordenadores con capacidades gráficas y a precios asequibles a finales de la década de los setenta hizo que se sobrepasara cualquier expectativa.

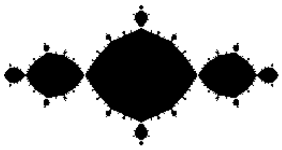


(a) $c = -0{,}67 + 0{,}31j$



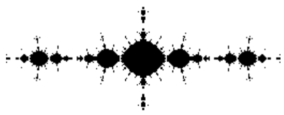
(b) $c = -0{,}8 + 0{,}4j$

(c) $c = 0{,}27$



(d) $c = -1$

(e) $c = -0{,}48 - 0{,}53j$



(f) $c = -1{,}312$

Figura 9: Conjuntos de Julia para distintos valores del parámetro c. Estos conjuntos se pueden dividir en dos grupos, los que están formados por una sola pieza y los que parecen estar fragmentados en muchas piezas. Los tres primeros pertenecen a la última clase.

Si observamos los distintos conjuntos de Julia rellenos representados en esta sección veremos que pueden clasificarse en dos grandes grupos según su estructura. Algunos de ellos parecen estar formados por una única pieza, de manera que parece factible poder caminar por su frontera interminablemente. Otros, sin embargo, parecen fragmentados o disconexos. Esta clasificación de hecho no es arbitraria y su estudio dio lugar a uno de los objetos matemáticos más complejos que existen: el conjunto de Mandelbrot.

4. El conjunto de Mandelbrot

Julia probó que la órbita de $z = 0$ juega un papel esencial para saber si un conjunto de Julia es conexo. Si esta órbita escapa al infinito, el conjunto aparece fragmentado como polvo fractal. En caso contrario, el conjunto de Julia es conexo.

El resultado anterior nos proporciona un método preciso y cómodo para determinar la conectividad de un conjunto de Julia. Ahora bien, ¿cuándo podemos considerar que la órbita de $z = 0$ diverge a infinito? Esta pregunta queda resuelta por la teoría de iteraciones que nos asegura que la órbita divergerá a infinito si en algún momento uno de sus puntos tiene módulo mayor o igual a 2.

Aunque no lo demostraremos, la clasificación anterior es todavía de carácter más fuerte, ya que, según el valor del parámetro c, el conjunto de Julia es o bien conexo o bien completamente disconexo, es decir, formado por una nube de puntos dispersos con la misma estructura que el conjunto de Cantor. Estos puntos aparecen dispuestos en grupos densos de forma que cualquier disco finito que envuelva a un punto contiene, como mínimo, otro punto del conjunto.

Dada esta división de los conjuntos de Julia, parece natural preguntarse qué valores de c de la ecuación $f(z) = z^2+c$ generan conjuntos de uno u otro tipo. Esta cuestión tan simple no fue resuelta hasta 1978 cuando Mandelbrot representó en un plano todos los valores de c que producían conjuntos de Julia conexos, consiguiendo la primera representación del conjunto que hoy lleva su nombre. Por aquellas fechas y con los medios disponibles las primeras y toscas impresiones de ordenador que obtuvo Mandelbrot eran del tipo de la de la figura 10.

Una representación más visible es la mostrada en la figura 11. Lo primero que salta a la vista es la gran región a la derecha que conforma una *cardioide*.[4] A la izquierda de la gran cardioide podemos observar un disco tangente

[4]Una cardioide es la curva engendrada por el movimiento de un punto de una circunferencia que rueda exteriormente sobre otra fija de igual radio. La ecuación de la cardioide en coordenadas cartesianas es $(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) = 4a^2y^2$ donde a es el radio de la circunferencia fija.

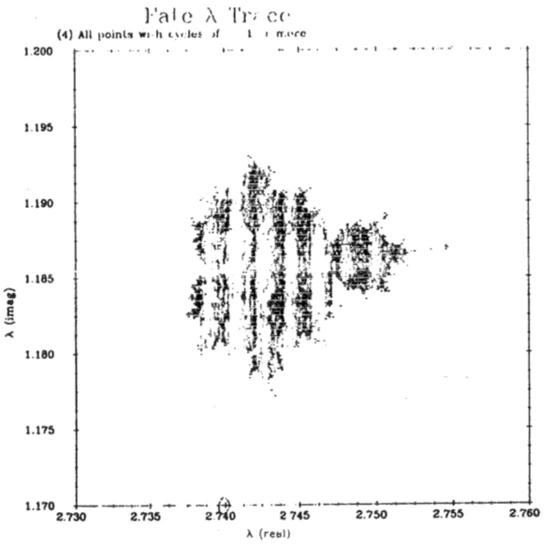


Figura 10: Una de las primeras fotografías del nuevo continente descubierto por Mandelbrot. Se trata de una de las primeras imágenes de una cardioide distinta a la principal y fue tomada en 1980. En tan solo unos años se ha hecho posible obtener imágenes a enormes resoluciones y con millones de colores con solo un ordenador personal. Aun así esta representación ya significaba mucho: en los años sesenta los primeros atractores extraños se representaron con una impresora mediante caracteres alfanuméricos.

a ella. Éste, no obstante, no es el único disco tangente a la cardioide, ya que pueden apreciarse multitud de pequeños discos tangentes a ella rodeándola. Si ampliáramos[5] algunas zonas de la imagen, veríamos que unidos a estos discos existen otros aún más pequeños, a los que se unen otros y así sucesivamente. Si se estudia detenidamente la sucesión de circulos cada vez más pequeños que se extiende horizontalmente en el sentido negativo del eje de las x y obtenemos los diámetros de los sucesivos círculos $d_1, d_2, \ldots$, podemos obtener el límite

$$\delta = \lim_{i \to \infty} \frac{d_i}{d_{i+1}} = 4{,}669201609102990671853203 82\ldots$$

cuyo valor es la constante de Feigenbaum. La universalidad de la constante de Feigenbaum es un hecho fascinante que hoy por hoy desafía a la ciencia.

Existen muchas otras cardioides repartidas por el plano, realmente infinitas. Todas estas cardioides están unidas a la cardioide principal por medio

[5]Cuando hablamos de ampliar una zona de la imagen de un conjunto fractal, nos referimos a representar el conjunto entre unos intervalos más pequeños que los de la imagen inicial y nunca a nada parecido a un *zoom* fotográfico que no aportaría ninguna información adicional.

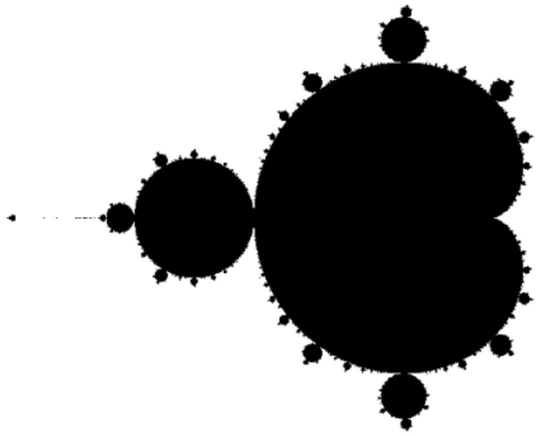


Figura 11: El conjunto de Mandelbrot. Puede apreciarse la cardioide y la serie de círculos cada vez más pequeños pegados a ella.

de filamentos cargados de nuevas cardioides. Estos filamentos se ramifican siguiendo pautas muy complejas haciendo que el conjunto de Mandelbrot sea conexo. La demostración de la conectividad del conjunto de Mandelbrot es una labor compleja que todavía presenta gran cantidad de cuestiones abiertas.

Existen series dudas sobre la autosemejanza del conjunto de Mandelbrot. Aunque es posible encontrar pequeñas copias en miniatura del conjunto por todo el plano, estas siempre están envueltas en filamentos cuyo aspecto varía notablemente según donde observemos. A diferencia de los conjuntos de Julia, que sí son autosemejantes, dadas dos copias del conjunto de Mandelbrot, podríamos identificar, en teoría, bajo qué escala del plano se han obtenido. Podemos, por tanto, considerar por ahora al conjunto de Mandelbrot como *casi autosemejante*.

Las imágenes de la figura 12 pueden dar una idea de la variedad de estructuras que es posible encontrar en el conjunto de Mandelbrot. Estas imágenes muestran de izquierda a derecha y de arriba a abajo un *zoom* sobre la imagen precedente a cada una.

4.1. Explosiones cromáticas

La representación del conjunto de Mandelbrot en una pantalla de ordenador es extremadamente sencilla [2]. El único problema que puede surgir es la discretización que impone la pantalla. El programa en pseudocódigo de

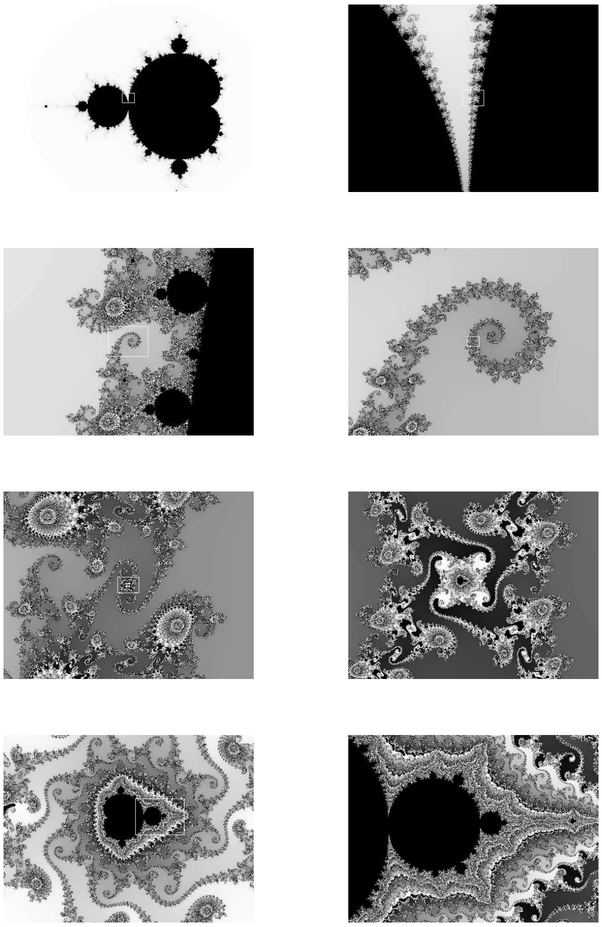


Figura 12: De izquierda a derecha y de arriba a abajo, sucesivas imágenes de una inmersión en el conjunto de Mandelbrot que demuestran el carácter casi autosemejante del conjunto. El centro de las imágenes corresponde al punto $-0{,}74650920 + 0{,}09848028j$ y la última muestra una escala de casi tres millones de aumentos sobre la primera. Para generarlas se utilizó el algoritmo de tiempo de escape.

la figura 13 asume que las dimensiones de la ventana utilizada son $\tilde{x} \times \tilde{y}$ y que se desea representar la parte del conjunto de Mandelbrot comprendida entre las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que conformarán, respectivamente, la esquina superior izquierda y la esquina inferior derecha de la imagen.

Aunque el valor de *iteraciones* del programa de la figura 13 puede mantenerse en torno a 200, deberá incrementarse conforme se vaya reduciendo el intervalo del conjunto de Mandelbrot a representar.

```
1. Sea Δp = (x₂ − x₁)/(x̃ − 1)
2. Sea Δq = (y₂ − y₁)/(ỹ − 1)
3. Hacer desde p = 0 hasta x̃
     3.1. Hacer desde q = 0 hasta ỹ
          3.1.1. Hacer p₀ = x₁ + p · Δp
          3.1.2. Hacer q₀ = y₁ + q · Δq
          3.1.3. Hacer z = 0 + 0j
          3.1.4. Desde k = 1 hasta iteraciones
               3.1.4.1. Hacer z = z² + (p₀ + q₀ j)
               3.1.4.2. Si |z| > 2, pintar el punto (p, q) y
                            salir del bucle de la variable k
4. Fin
```

Figura 13: Algoritmo para representar el conjunto de Mandelbrot. Las dimensiones de la ventana utilizada son $\tilde{x} \times \tilde{y}$. La parte a representar del conjunto es la comprendida entre las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que conformarán, respectivamente, la esquina superior izquierda y la esquina inferior derecha de la imagen obtenida.

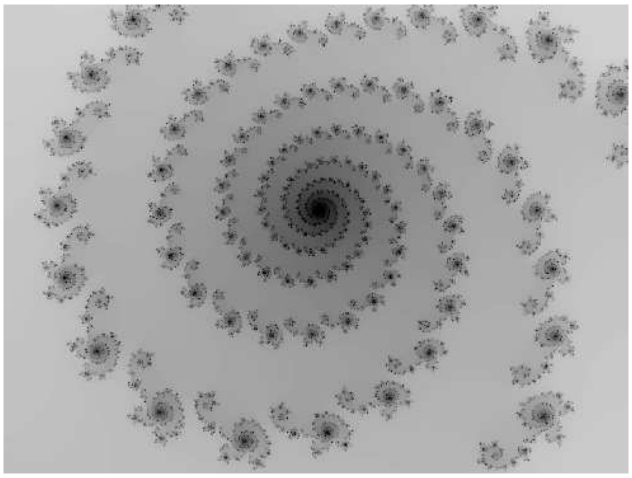


Figura 14: El algoritmo de tiempo de escape convierte en un arte la representación de conjuntos de Julia. Hoy día es casi tan importante la selección de la zona de visualización como la de una adecuada paleta de colores. El conjunto aquí mostrado corresponde a $c = -0{,}204812 - 0{,}663316j$.

Una de las formas de representar el conjunto de Mandelbrot que proporciona las imágenes de mayor belleza es mediante el denominado *algoritmo de tiempo de escape*. Para representar el conjunto de Mandelbrot mediante este procedimiento seguimos pintando, como hasta ahora, los puntos pertenecientes al conjunto de color negro. Los puntos que divergen a infinito, sin embargo, se pintan con distintos colores según la *velocidad* de escape hacia infinito de su órbita asociada. Lo anterior se lleva a cabo en la prácti-

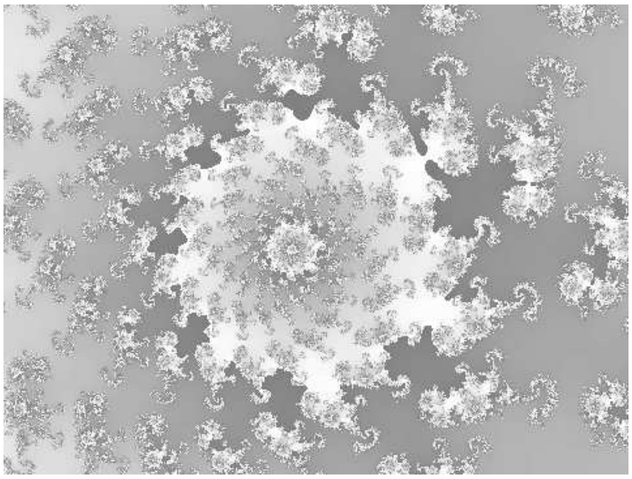


Figura 15: Otro conjunto de Julia merecedor de una visita. El parámetro c de este conjunto es $-0{,}833062 + 0{,}194798j$.

ca considerando una paleta de colores en la que cada uno lleva asociado un número distinto. Un punto no perteneciente al conjunto se pinta de un color n si son necesarias n iteraciones para que el módulo de su órbita sea mayor que 2 (condición esta, como ya vimos, suficiente para que la orbita se fugue hacia infinito). El algoritmo de tiempo de escape también puede aplicarse, por supuesto, a la representación de conjuntos de Julia. Un par de conjuntos de Julia obtenidos con esta técnica se muestran en las figuras 14 y 15. El algoritmo de tiempo de escape, en la sencilla versión aquí comentada y en variaciones más sofisticadas, ha convertido en un arte la representación de conjuntos fractales

5. Lenguajes fractales

En las secciones anteriores se describió la forma de construir varios fractales de muy diversa índole. Sin embargo, salvo en el caso de los sistemas cuadráticos complejos, no se mostró un método sencillo para generarlos.

Los sistemas D0L proporcionan las pautas para la obtención de multitud de fractales, basándose en la interpretación de ciertos códigos que permiten la construcción de una sucesión de conjuntos convergentes al fractal. No es el único enfoque posible (existen otros métodos como los sistemas de funciones iteradas [1] o los basados en automatas celulares), pero sí es uno de los más sencillos y potentes.

5.1. Teoría de lenguajes

Antes de presentar los sistemas D0L es necesaria una pequeña introducción a los conceptos básicos de la teoría de lenguajes. Unas cuantas definiciones nos darán las herramientas básicas para comprender el resto del capítulo.

Para empezar consideremos un conjunto finito Σ al que denominaremos *alfabeto*. A los elementos de Σ también los denominaremos *símbolos*. Las letras y los dígitos son ejemplos de símbolos utilizados frecuentemente. Una *cadena* (o *palabra*) es una secuencia posiblemente infinita de símbolos yuxtapuestos. Por ejemplo, partiendo del alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ podemos construir cadenas como $abbc$ o $aaaaaa\ldots$

Consideremos ahora el conjunto de todas las cadenas de longitud finita sobre Σ, incluyendo la cadena vacía ϵ; dicho conjunto recibe a menudo el nombre de *lenguaje universal* y se denota por $\Sigma^\star$.

Para $x \in \Sigma^\star$, $|x|$ es la longitud de x, esto es, el número de elementos que forman la cadena x. Por lo tanto, $|\epsilon| = 0$.

El concepto más importante y el que da utilidad y sentido a la teoría de lenguajes es el de *lenguaje*. Un lenguaje es cualquier subconjunto de $\Sigma^\star$. Así, $\mathcal{L}_1 = \{aa, \epsilon, bca\}$ y $\mathcal{L}_2 = \{c, cc, ccc, cccc, \ldots\}$ son lenguajes sobre el alfabeto anterior.

5.2. Fractales sintácticos

No daremos intencionadamente una definición detallada de fractal en este trabajo. Preferimos que el lector maneje la idea intuitiva de conjunto fractal que adquirió en las secciones anteriores y que en esta se concretará todavía más sin llegar a una definición rigurosa. Puede considerarse, por tanto, un fractal como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con propiedades peculiares, especialmente la de autosemejanza.

Las técnicas sintácticas para generar fractales que se discuten a continuación son una forma agradable y casi natural de familiarizarse con los conjuntos fractales bajo $\mathbb{R}^2$, aunque su generalización a espacios mayores es casi inmediata. Una de las razones de su popularidad es que los objetos que se procesan realmente son símbolos relacionados con primitivas geométricas y no con desarrollos numéricos que pueden ser menos sencillos de entender. La idea es generar mediante ciertas reglas predeterminadas una secuencia de cadenas convergente a un cierto fractal. El estudio de los fractales se traslada de esta forma, independientemente de la dimensión del espacio inicial, al dominio de las palabras infinitas.

Aquí estudiaremos los *sistemas D0L*, que son un tipo particular de *sistemas L*. Los sistemas L fueron introducidos en 1968 por el matemático y biólogo danés Aristid Lindenmeyer con el propósito de simular el crecimiento de organismos vivos. El modelado de organismos a través de los sistemas L permite comprobar ciertas hipótesis relativas a los mecanismos existentes tras determinados fenómenos biológicos.

Tanto los sistemas L como los D0L son estructuras claramente discretas, por lo que cabe preguntarse por su utilidad para aproximarse a conjuntos fractales. En general, no hay una dualidad directa entre un fractal en $\mathbb{R}^n$ y un modelo discreto; es más, uno espera intuitivamente que muchos conjuntos (los conjuntos de Julia, por ejemplo) no puedan describirse mediante tal modelo discreto. Con todo, los estudios realizados sobre sistemas L aseguran que se pueda capturar mediante modelos sintácticos la estructura fractaliforme de multitud de conjuntos autosemejantes.

5.3. Sistemas D0L

Dado un alfabeto finito Σ, los sistemas D0L [4] generan cadenas autosemejantes al iterar un morfismo respecto a la operación de concatenación $\phi : \Sigma^\star \longrightarrow \Sigma^\star$ (endomorfismo de $\Sigma^\star$) sobre una cadena inicial s para construir la secuencia $\phi(s), \phi^2(s) = \phi(\phi(s)), \phi^3(s) \ldots$ Por ser un morfismo, ϕ viene completamente definido por el conjunto de sus valores $\phi(x)$ para $x \in \Sigma$. A pesar de su sencillez, este modelo computacional permite el cálculo de cadenas con propiedades topológicas complejas como veremos más adelante. Ahora formalicemos la idea anterior.

Un sistema DT0L es un triplete $D = (\Sigma, \Phi, s)$ donde Σ es un conjunto finito, Φ es un conjunto de p morfismos $\Sigma^\star \longrightarrow \Sigma^\star$ y s es una cadena inicial o axioma.

Consideremos el conjunto de todas las cadenas que es posible generar mediante la aplicación de cualquier posible secuencia de los morfismos de Φ sobre la cadena inicial s. A este lenguaje lo designaremos por $\mathcal{L}(D)$.

Ejemplo Sea el sistema DT0L $\Gamma = (\{a, b\}, \{\phi_1, \phi_2\}, a)$ con los morfismos definidos por

$$\begin{aligned} \phi_1(a) &= aba, \quad \phi_1(b) = aa \\ \phi_2(a) &= bab, \quad \phi_2(b) = b \end{aligned}$$

Tendremos entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Gamma) &= \{\phi_1(a), \phi_2(a), \phi_1(\phi_1(a)), \phi_2(\phi_1(a)),\\ &\qquad \phi_1(\phi_2(a)), \phi_2(\phi_2(a)), \phi_1(\phi_1(\phi_1(a))), \ldots\}\\ &= \{aba, bab, abaaaaba, babbbab, aaabaaa,\\ &\qquad bbabb, abaaaabaabaabaabaaaaba, \ldots\}\end{aligned}$$

que es el lenguaje asociado al sistema.

Un sistema D0L es un sistema DT0L con $p = 1$, esto es, con un único morfismo. El 0 en el acrónimo D0L significa que la reescritura es independiente del contexto (la reescritura de un símbolo es independiente de su ubicación en la cadena), la D significa determinista y la L es por el apellido del creador de los sistemas L, Lindenmeyer. En lo siguiente solo consideraremos sistemas D0L y designaremos por ϕ al morfismo (único) del sistema.

Para dibujar las cadenas de $\mathcal{L}(D)$ utilizaremos una aplicación $K : \Sigma^\star \longrightarrow \mathbb{R}^2$ seguida normalmente de una función de reescalado $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Por simplificar nos centraremos en representaciones sobre el plano.

Una posibilidad para K es que traduzca cada símbolo de la cadena a vectores unitarios con, posiblemente, diferentes sentidos y cada uno con origen o punto de aplicación en el extremo del vector inmediatamente anterior. La forma de K influirá decisivamente en el tipo de conjuntos que se puedan generar.

El cometido de L es meramente estético. La función L provoca una reducción de escala en cada iteración sucesiva de manera que el conjunto generado queda confinado en una determinada zona del plano. De lo contrario, la expansión de la cadena inicial aumentaría, posiblemente exponencialmente, el tamaño del conjunto generado.

Si la secuencia de curvas $K(\phi(s)), K(\phi^2(s)), K(\phi^3(s)), \ldots$ converge a una curva particular $\mathcal{C}$ (según una métrica apropiada), entonces es razonable considerar la cadena infinita $x = \lim_{n\to\infty} \phi^n(s)$ en lugar de $\mathcal{C}$ e intentar encontrar propiedades combinatorias y topológicas de x en vez de características geométricas en $\mathcal{C}$. Se ha demostrado que bajo ciertas condiciones esta convergencia puede ser garantizada. Nosotros no llegaremos tan lejos. En la siguiente sección mostraremos un enfoque para caracterizar a la aplicación K ligeramente distinto al sugerido anteriormente con vectores unitarios, que nos permitirá alcanzar el objetivo inicial: generar fractales mediante sistemas D0L.

SÍMBOLO	FUNCIÓN
F	avanza un paso la tortuga dibujando
G	avanza un paso la tortuga sin dibujar
$+$	gira la tortuga a la izquierda α radianes
$-$	gira la tortuga a la derecha α radianes
[	almacena en una pila la posición y ángulo actual de la tortuga
]	saca de la pila nuevos valores para la posición y el ángulo de la tortuga

Cuadro 1: Algunos símbolos del alfabeto del sistema D0L modificado tienen un significado especial cuando son interpretados por la aplicación K. El número de símbolos especiales puede aumentarse para dotar de mayor poder de representación al sistema.

5.4. Curvas fractales y sistemas D0L

La aplicación K, que transforma las cadenas del lenguaje asociado a un sistema D0L en un conjunto geométrico sobre el plano, nos da la clave para convertir cadenas autosemejantes en fractales. Una de las aproximaciones más sencillas a la modelización de K consiste en interpretar algunos de los símbolos de las cadenas del lenguaje generado por un sistema D0L como pautas de comportamiento para una tortuga geométrica [2] al estilo de la del lenguaje de programación Logo.

Ampliemos la definición de sistema D0L para incluir la determinación de un ángulo cuyo significado se verá más adelante. Definamos, por tanto, un *sistema D0L modificado* como $D = (\Sigma, \phi, s, \alpha)$ donde todo es como antes excepto por la aparición de α, que indica un ángulo de giro en radianes. Además, Σ incluirá como mínimo el símbolo F y opcionalmente alguno de los símbolos del conjunto $\{G, +, -, [,]\}$, que tienen para nuestra aplicación K el significado especial mostrado en la tabla 1, aunque pueden utilizarse en el morfismo ϕ como cualquier otro símbolo.

Nótese que es posible que ϕ mantenga invariable algún símbolo de Σ haciendo $\phi(x) = x$ para algún $x \in \Sigma$. De hecho, este es el comportamiento más habitual con los símbolos del conjunto $\{+, -, [\,,]\,\}$. De forma contraria, es frecuente que $\phi(F) \neq F$ y que $\phi(G) \neq G$.

Ejemplo El sistema D0L $\Gamma_1 = (\{F, G\}, \phi_1, F, \pi)$ con $\phi_1(F) = FGF$ y $\phi_1(G) = GGG$ genera cadenas que cuando son interpretadas según la aplicación K descrita anteriormente convergen al conjunto ternario de Cantor. El lector puede comprobarlo generando manualmente las primeras cadenas del lenguaje. Nótese que en este caso, por tratarse de un fractal plano, el valor del ángulo es indiferente. Se ha mantenido en Γ_1 por consistencia con la definición.

5.5. Implementación

Las curvas fractales pueden generarse en la pantalla de un ordenador de muy distintas formas. Dada la autorreferencia que las caracteriza, una forma evidente (y utilizada con bastante frecuencia) es mediante algún algoritmo recursivo. Esta es una solución bastante potente en muchas situaciones, pero implica la elaboración de un programa para cada curva distinta y el aburrido enfrentamiento con errores inherentes a la propia programación y no a la curva en sí. Los sistemas D0L brindan un mecanismo elegante para representar ciertas formas fractales, permitiendo obtener con un único programa multitud de fractales según el sistema D0L suministrado como entrada.

El mecanismo de actuación del programa sería el siguiente: introducido el sistema D0L como entrada al programa, se genera la cadena derivable tras el número de pasos de derivación indicados por el usuario. Dicha cadena se interpreta símbolo a símbolo según la tabla 1, generando la curva en pantalla. Aquellos símbolos que aparezcan en la cadena y no sean alguno de los símbolos especiales, simplemente no se interpretan, procediendo automáticamente con el símbolo siguiente de la cadena.

Ejemplo El sistema D0L $\Gamma_2 = (\{F,+,-[,]\},\phi_2,++++F,\pi/8)$ con $\phi_2(F) = FF-[-F+F+F]+[+F-F-F]$ y la identidad como imagen de ϕ_2 para los símbolos distintos de F genera cadenas que convergen a una especie de arbusto fractal.

Vamos a analizar los tres primeros niveles de derivación del sistema D0L Γ_2. En el nivel cero (todavía no se ha realizado ninguna sustitución) la cadena es $++++F$ (la cadena inicial), lo que provoca que la tortuga gire un poco y pinte una recta. Tras la primera derivación la cadena a interpretar es $++++FF-[-F+F+F]+[+F-F-F]$. La segunda derivación hace la cadena un poco más larga, resultando

$$++++FF-[-F+F+F]+[+F-F-F]FF-[-F+F\ldots$$

El lector puede generar la cadena completa e intentar dibujar su interpretación en papel. La cadena generada en el nivel 4 permite obtener la sorprendente imagen que se muestra en la figura 16.

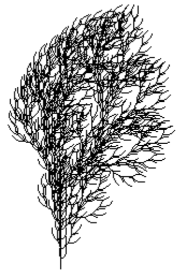


Figura 16: Los sistemas D0L son ideales para la modelización de plantas como esta, obtenida del sistema Γ_2 tras 4 iteraciones. Una de las primeras aplicaciones de estos sistemas fue la representación gráfica de estructuras presentes en la naturaleza.

Ejemplo El sistema D0L $\Gamma_3 = (\{F, X, +, -\}, \phi_3, FXF--FF--FF, \pi/3)$ con $\phi_3(F) = FF$, $\phi_3(X) = --FXF{+}{+}FXF{+}{+}FXF--$ y la identidad como imagen de ϕ_3 para los símbolos restantes genera cadenas que cuando son interpretadas según la aplicación K descrita en la tabla 1 convergen al triángulo de Sierpinski.

Otros fractales famosos se generan también de manera sencilla mediante sistemas D0L. La curva de Koch o la de Hilbert son ejemplos de ello.

Ejemplo El sistema D0L $\Gamma_4 = (\{F, +, -\}, \phi_4, F, \pi/3)$ con $\phi_4(F) = F+F--F+F$, y la identidad como imagen de ϕ_4 para los símbolos restantes genera cadenas que cuando son interpretadas según la aplicación K descrita en la tabla 1 convergen a la curva de Koch.

Ejemplo El sistema D0L $\Gamma_5 = (\{F, X, Y, +, -\}, \phi_5, X, \pi/2)$ con $\phi_5(X) = -YF+XFX+FY-$, $\phi_5(Y) = +XF-YFY-FX+$ y la identidad como imagen de ϕ_5 para los símbolos restantes genera cadenas que cuando son interpretadas según la aplicación K de la tabla 1 convergen a la curva de Hilbert.

5.6. Un poco de botánica

El arbusto fractal de la figura 16 no es un ejemplo aislado de la aproximación a la naturaleza de los fractales. Aunque operan perfectamente con muchas de las clásicas curvas fractales, los sistemas D0L también producen modelizaciones de plantas, árboles y arbustos de aspecto casi real. Precisamente, este fue el primer uso que se hizo de los sistemas L (recordemos, un superconjunto de los sistemas D0L) asociado a gráficos por ordenador. Fueron A. R. Smith en 1984 y P. Prusinkiewicz en 1986 los creadores de este método.

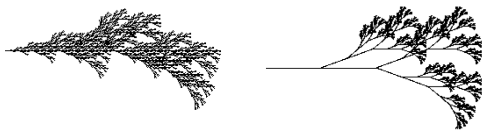


Figura 17: Las estructuras fractaliformes modelan con bastante realismo muchos tipos de vegetación. Estas dos plantas, generadas con sistemas D0L como los discutidos en este capítulo, son un ejemplo de ello.

En la figura 17 se muestran dos plantas más generadas con sistemas D0L. El lector puede intentar encontrar los morfismos que las generan. Aunque no obtenga un sistema exacto, seguro que es capaz de crear un modelo similar.

Dentro de los procesos de crecimiento fractal existe uno que emula con gran realismo el crecimiento de muchas especies: la ramificación. La ramificación puede observarse en un gran número de árboles, plantas, algas, musgos, líquenes y corales. Los sistemas D0L permiten generar muchas de estas pautas de ramificación tales como la ramificación dicotómica, la monopódica o la simpódica mediante sistemas extremadamente sencillos.

5.7. Más allá de los sistemas D0L

Los sistemas utilizados pueden complicarse todo lo que uno quiera. Pueden hacerse dependientes del contexto para permitir, por ejemplo, que en la generación de un árbol, una rama demasiado profunda se convierta en una explosión de hojas o pueden utilizarse distintas aplicaciones K con nuevos símbolos para manejo de color. Una de las modificaciones más espectaculares permite la generación de curvas tridimensionales: la generalización de muchas de las curvas fractales presentadas a tres dimensiones es casi inmediata.

6. Composición musical algorítmica

En el resto de secciones de este tutorial, se discute el uso de la recursividad, la autosemejanza o el caos, estudiados anteriormente, como materia prima para la composición de música. El principio fundamental de la música fractal reside en la proyección del comportamiento dinámico o la estructura de un fractal sobre un espacio musical. Aunque esta forma de composición suele presentarse como opuesta a la de la música tradicional, en determinadas épocas de la historia, ciencia y arte han estado más ligados que en otras.

6.1. Pitágoras

Los pitagóricos de la antigüedad consideraban que los números eran parte esencial de la música e intentaron explicar la armonía en función de una serie de razones numéricas universales [14], que todavía hoy forman parte de la teoría musical.

En los últimos siglos, sin embargo, música y matemáticas han seguido caminos separados y conceptos imprecisos como «creatividad» o «inspiración» han sido respuesta habitual para eludir cualquier explicación racional sobre el proceso de composición. Aun así, algunos autores defienden [14] que los compositores clásicos dejaron, sin saberlo, un cierto espíritu matemático en sus obras.

El idealismo geométrico de los pitagóricos sobrevive hoy día en el uso de las técnicas de composición basadas en la teoría del caos y la geometría fractal.

6.2. Joseph Schillinger

Desde la segunda mitad del siglo XX, ambas disciplinas, música y matemáticas, arte y ciencia, comienzan a reencontrarse gracias al uso extendido de sintetizadores, secuenciadores y programas de tratamiento digital de señales.

Un poco antes, en la década de los años veinte y treinta, el músico teórico ruso, emigrado a Estados Unidos, Joseph Schillinger desarrolló un detallado sistema de composición musical basado en principios científicos. El sistema [19] está compuesto por siete libros, cada uno de ellos centrado en un aspecto diferente de la composición musical. La obra de Schillinger todavía no goza del reconocimiento que según algunos merece, pero ha influido enormemente en la música del siglo XX, especialmente en compositores como George Gershwin, Glenn Miller o Benny Goodman, entre otros [5].

La base del sistema de Schillinger es geométrica y se fundamenta en el concepto de relaciones de fase de movimientos periódicos simples. Schillinger encontró distintas formas de proyectar estas relaciones en el ritmo, pero también en áreas mucho menos obvias como el tono, la escala, los acordes, la progresión armónica e, incluso, en los aspectos semánticos y emocionales de la composición musical [5].

Hay quienes consideran que el sistema de Schillinger anticipó la música por ordenador antes de que existieran los ordenadores y que introdujo muchas técnicas algorítmicas de composición, incluso la utilización de series numéricas autosemejantes.

6.3. Controversia ciencia/arte

Muchas voces denuncian que la música fractal no es realmente «arte». El arte es emocional, intuitivo y expresivo, mientras que la ciencia es racional, demostrable y descriptiva. Dejando a un lado los argumentos, más o menos discutibles, de que este tipo de música no procede de un acto de composición creativo y fruto de la inspiración, lo cierto es que la música fractal suena de entrada rara y desconcertante.

La mayor parte de las composiciones, por tanto, utilizan la música fractal como punto de partida; el compositor moldea la melodía fractal hasta obtener un resultado que le agrade. Muchas veces este proceso es lento: el autor del programa The Well Tempered Fractal asegura [8] que invirtió más de diez horas en obtener una composición que le agradara a partir de datos fractales. El resultado es, según el autor, una composición que no podría imaginar sin la ayuda de un ordenador, pero que un ordenador nunca habría producido en una forma tan elaborada.

Con todo, los programas de generación de música fractal recientes (como MusiNum o Gingerbread) son cada vez más complejos y es posible generar automáticamente con ellos melodías agradables sin necesidad de un procesamiento ulterior.

7. Fractalidad de composiciones clásicas

Normalmente se entiende por música fractal aquella que ha sido generada a partir de la proyección en un espacio musical del comportamiento de un determinado fractal. Aunque el fractal sea autosemejante e invariable a la escala, es difícil que la composición musical lo sea; es complicado incluso definir exactamente estos conceptos para una melodía.

Bennett considera en [3] que «como mecanismos para generar sonidos, las técnicas relacionadas con los sistemas caóticos pueden ser de un interés considerable para los compositores de hoy en día, pero, por la forma en que los sucesos sonoros se perciben en el tiempo, me es difícil imaginar que la naturaleza esencial de los sistemas caóticos –la autosemejanza y la invarianza de escala– pueden tener alguna vez una importancia estructural real en la música.». Aun así, algunos estudios han encontrado rasgos de autosemejanza en algunas piezas clásicas, como se cuenta en el siguiente apartado.

7.1. Bach y Beethoven

La coral situada al final de «Kunst der Fuge» (1749) de Johann Sebastian Bach es un ejemplo de pieza autosemejante [3]. En ella los mismos motivos son repetidos una y otra vez con distintas variaciones dentro de una región mayor de la pieza. Así, por ejemplo, varias voces repiten al doble de velocidad la melodía de la voz principal (un motivo se repite por *disminución* a escalas menores).

Hay varios trabajos que analizan la manifestación de estructuras fractaliformes en composiciones clásicas: [18] estudia la analogía entre la estructura del conjunto de Cantor y la primera *Ecossaisen* de Beethoven, así como entre el triángulo de Sierpinski y el tercer movimiento de la sonata para piano número 15, opus 28, también de Beethoven; en [6] se analiza la autosemejanza de las fugas de Bach.

8. Compositores de música fractal

Cada vez son más los compositores que utilizan el caos o la geometría fractal como apoyo en sus composiciones. Las siguientes secciones introducen a un par de ellos, pero son muchos más. En el artículo de Tac Leung [11] se presentan algunas historias personales relacionadas con estos compositores.

8.1. Phil Thompson y Organised Chaos

Phil Thompson es un programador y músico amateur afincado en Londres. Comenzó a componer música fractal como un hobby, hasta que una pieza suya emitida por la radio de Bristol atrajo la atención de un gran número de británicos. En octubre de 1998 se publicó su primer álbum, «Organized chaos».

Las composiciones de Thompson tienen como base el conjunto de Mandelbrot. Él no considera su trabajo como composición, sino como «descubrimiento» y afirma que «es algo mágico cuando encuentras una bella imagen fractal y descubres que su fórmula esconde una bonita pieza musical en un determinado punto o puntos» [11]. Thompson es el desarrollador del programa Gingerbread [21].

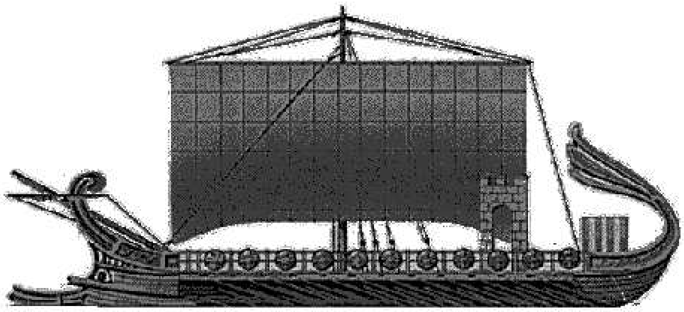


Figura 18: La galera fenicia en la que se inspiró el trabajo de Gary Lee Nelson.

8.2. Gary Lee Nelson y la ruta fenicia

En su obra «The voyage of the Golah Iota», Gary Lee Nelson explota las propiedades de la ecuación logística como origen de una síntesis granular.[6] La síntesis se construye incrementando gradualmente el parámetro de crecimiento r de la ecuación logística, comenzando en la zona no caótica de la ecuación, adentrándose en la zona caótica y volviendo atrás.

La composición es una metáfora en la que se describe un hipotético viaje de una galera fenicia, llamada *Iota* (véase la figura 18), desde las calmadas aguas mediterráneas del norte de África a las orillas tranquilas de Brasil a través de las tormentas y los vientos del Atlántico [15].

Gary Lee Nelson utilizó una función que daba valores a r en función del tiempo. La función asciende lentamente desde $r = 1{,}0$ a $r = 4{,}0$ y desciende luego rápidamente hasta $r = 1{,}0$ durante un periodo total de nueve minutos. Los valores de x_∞ resultantes de la ecuación logística (los gránulos) se produjeron con una densidad de 10 por segundo cuando r valía 1,0 y de 1000 por segundo cuando $r = 4{,}0$. Los valores de x_∞ se escalaron y se llevaron sobre una escala microtonal (siete octavas de 192 tonos cada una).

8.3. El proyecto Strange Attractions

«Strange attractions» es un CD recopilatorio de música fractal con contribuciones de diez de los músicos más importantes del mundo dentro de

[6] En la síntesis granular se agrupan un gran número de pequeños sonidos para formar estructuras más complejas, de la misma manera que los pintores puntillistas crean imágenes a partir de puntos muy pequeños de colores. La frecuencia, amplitud y timbre de cada sonido (gránulo) y la forma de combinarlos determinan el sonido resultante.

este campo: Don Archer, Mehmet Okonsar, Phil Jackson, Chris Sansom, Brian E. Jones, Dave Strohbeen, José Oscar Marques, Phil Thompson, Patricia Mason y Armand Turpel. Incluirá composiciones realizadas con varios programas entre los que se encuentra Gingerbread. El álbum todavía no se había editado a comienzos de 2000, aunque se puede tener información sobre él en la dirección `http://www.organised-chaos.com/oc/cdclub/cdclub.html`.

9. El sonido de las series numéricas

Una forma sencilla de crear una melodía es partir de una secuencia de números enteros positivos e ir asignando a cada uno una determinada nota musical, por ejemplo, *do* para el 1, *re* para el 2, etc. Para obtener un buen resultado es necesario que los valores de la secuencia estén acotados de manera que las notas generadas no pertenezcan a octavas muy alejadas.

La secuencia de Morse-Thue [10] es una secuencia binaria con propiedades sorprendentes. La secuencia puede generarse recursivamente comenzando con un 0 y duplicando en cada paso la longitud de la secuencia al añadirle la secuencia complementaria a la actual: 0, 01, 0110, 01101001, ...

Otra forma de generar la secuencia de Morse-Thue se basa en calcular la paridad (la suma de los dígitos módulo 2) de cada número de la secuencia $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ representada en binario, $0, 1, 10, 11, 100, 101, \ldots$ La secuencia resultante es la secuencia de Morse-Thue, $0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots$

La primera forma explicada para construir la secuencia la hace claramente aperiódica (nunca se repite). Con todo, la secuencia tiene una propiedad todavía más importante: la secuencia infinita es autosemejante. Si tomamos solo la segunda componente de cada dos (o la cuarta de cada cuatro, o la octava de cada ocho,...) obtenemos la misma secuencia.

Pese a ser aperiódica, el espectro de la secuencia Morse-Thue no se parece al de una secuencia aleatoria. La autosemejanza introduce correlaciones a largo plazo en la secuencia y se obtiene un espectro con estructura y formantes bien definidos.

A pesar de las sorprendentes propiedades de la secuencia, el hecho de que cada componente tome solo dos posibles valores, la hace poco interesante si lo que se pretende es generar música a partir de ella, como se comentó al comienzo de esta sección. Sin embargo, con un pequeño cambio, podemos obtener una secuencia con la que poder generar fácilmente una melodia.

NÚMERO DECIMAL	NÚMERO BINARIO	SUMA DE LOS DÍGITOS	TONO
1	**1**	1	c
2	**1**0	1	c
3	**11**	2	d
4	**1**00	1	c
5	**1**0**1**	2	d
6	**11**0	2	d
7	**111**	3	e
8	**1**000	1	c
9	**1**00**1**	2	d
10	**1**0**1**0	2	d
11	**1**0**11**	3	e
12	**11**00	2	d
13	**11**0**1**	3	e
14	**111**0	3	e
15	**1111**	4	f
16	**1**0000	1	c
⋮	⋮	⋮	⋮

Cuadro 2: Notas obtenidas a partir de una secuencia, autosemejante y aperiódica como la de Morse-Thue, a partir del procedimiento indicado en el texto.

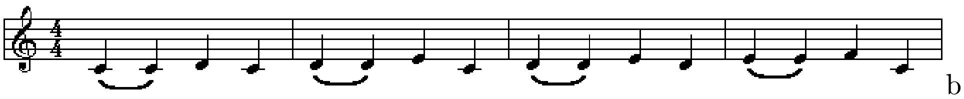


Figura 19: Partitura de la melodía del cuadro 2.

El cambio consiste en calcular la suma de todos los dígitos de la representación binaria del número, en lugar de su paridad. Ahora, por tanto, a partir de la secuencia $1, 10, 11, 100, 101, \ldots$ obtendremos $1, 1, 2, 1, 2, 2, \ldots$ El cuadro 2 muestra las primeras componentes de la secuencia y la melodía que resulta al hacer corresponder cada número con una nota (comenzando con *do* para el valor 1). La figura 19 muestra esta misma melodía con notación musical.

9.1. El programa MusiNum

El programa Musinum [10] desarrolla la idea anterior y la extiende de varias formas:

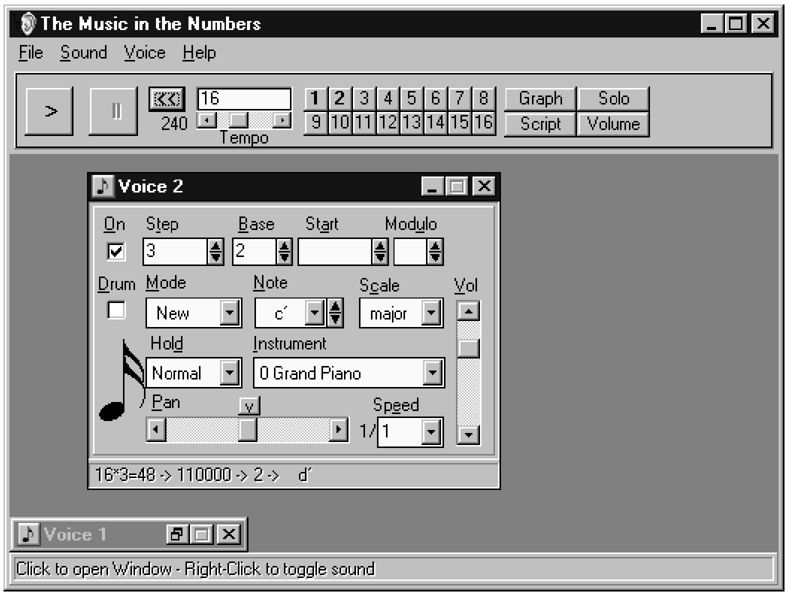


Figura 20: Ventana del programa Musinum.

- La secuencia original no tiene por qué ser únicamente $1, 2, 3, \ldots$. Otras secuencias como $1, 3, 5, 7, \ldots$ también proporcionan resultados interesantes.
- La base numérica utilizada en la conversión de la secuencia anterior, puede ser cualquiera y no necesariamente 2.
- La nota que corresponde al número 1 (y que permite deducir el resto de correspondencias) puede ser cualquier nota dentro de la escala.
- La escala utilizada puede ser elegida, e incluso creada, por el usuario.

9.1.1. Uso del programa

La figura 20 muestra una pantalla del programa Musinum. El programa permite ejecutar hasta 16 voces simultáneamente, cada una con una secuencia e instrumento propio. Con los botones numerados del 1 al 16 se muestra la ventana de configuración de la voz correspondiente. Para que la voz suene debe tener activada la casilla marcada con `On`. Otra forma de activar o desactivar cada voz es haciendo clic con el botón derecho del ratón en los botones numerados del 1 al 16.

El botón de reproducción y el de pausa reproducen o detienen la ejecución de la composición. Además, hay controles para especificar el tempo en

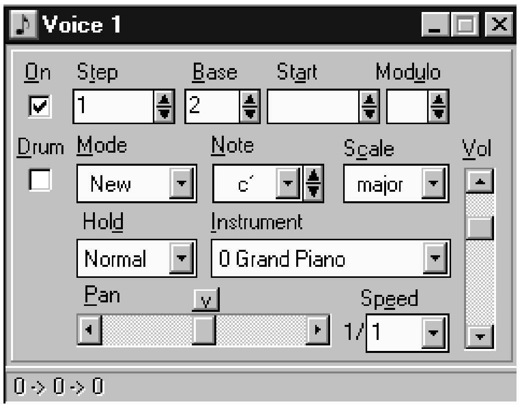


Figura 21: Ventana de control de una voz del programa Musinum.

golpes por segundo y para hacer que se escuche únicamente la voz actual (el botón etiquetado con `Solo`).

La figura 21 muestra la ventana de control de los parámetros de una voz. Veamos cómo influyen estos parámetros en la nota a emitir. El programa tiene un contador incremental, digamos i, que va tomando valores $1, 2, 3, \ldots$ Para cada voz y para cada nuevo valor del contador i se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Calcular

$$\begin{aligned} n &= \left\lfloor \frac{i}{\texttt{Speed}} \right\rfloor \\ x &= \texttt{Step} \cdot n + \texttt{Start} \end{aligned}$$

   donde $\lfloor y \rfloor$ es la parte entera de y.

2. Sea $b(c, y)$ la representación en base c del número y. Sea $S(y)$ la suma decimal de las cifras de y. Calcular:

$$t = S(b(\texttt{Base}, x)) \mod \texttt{Mod}$$

3. Si t es mayor que un determinado umbral dependiente de la escala utilizada (`Scale`), esta iteración no produce nota alguna; se incrementa i y se vuelve al primer paso.

4. En caso contrario, se obtiene la nota a emitir en función del valor de t, del valor de `Note` (que indica la nota para $t = 1$) y de la escala utilizada (`Scale`).

El instrumento con el que se reproducirá la nota se selecciona desde `Instrument`. Los otros dos parámetros, `Hold` y `Mode`, indican, respectivamente, cuánto se sostiene la nota y algunas condiciones adicionales para decidir si esta suena o no finalmente.

Al marcar la casilla `Drum` en una voz, su salida se manda al canal de percusión del dispositivo MIDI. Finalmente, en el menú `File` se encuentra la opción que permite guardar la composición resultante en un archivo MIDI.

10. El sonido de los atractores extraños

La órbita o trayectoria de un sistema caótico va dibujando, según avanza el tiempo, un atractor extraño en el espacio de fases, como ya vimos. Esta evolución temporal en el espacio de fases puede aprovecharse para obtener una melodía que evolucione con el atractor. Por ejemplo, si el espacio de fases es bidimensional puede utilizarse de alguna manera la coordenada x para decidir la altura de la nota a interpretar y la coordenada y para decidir su duración.

Este es el principio básico de los programas que generan música fractal a partir de atractores extraños y de fractales. Este último caso, representado por el conjunto de Mandelbrot, se trata en este trabajo en una sección aparte, la 12.

10.1. El programa The Well Tempered Fractal

El programa The Well Tempered Fractal (TWTF) permite proyectar diez tipos de atractores extraños (tal como el atractor de Duffing) sobre 21 escalas diferentes. TWTF realiza esta proyección siguiendo una serie de principios [8], también seguidos por otros programas de música fractal:

- Aunque el oído humano puede percibir un rango enorme de frecuencias, en la música preferimos escalas discretas.
- El oído humano puede percibir un rango de ocho octavas aproximadamente, pero la mayor parte de las melodías usan un pequeño subconjunto de todas esas notas.
- La resolución de la música es mucho menor que la de una imagen fractal; utilizar toda la información disponible en un fractal produciría una composición excesivamente larga y complicada.

- La música que carece de un patrón reconocible no es interesante. Es necesario un cierto orden en las melodías que las hagan comprensibles, pero ese patrón de orden tampoco ha de ser muy previsible.

El objetivo de TWTF es, según su autor, producir información musical que los compositores puedan manipular para crear sus piezas, no producir directamente música.

Una vez seleccionado un sistema caótico, el programa genera aleatoriamente valores para los parámetros del sistema y comienza a dibujar los puntos del atractor resultante. Conforme los puntos se van dibujando, se reproducen las notas que les corresponden. Esta correspondencia se establece dividiendo el espacio en el que se dibuja el atractor con una rejilla formada por regiones cuadradas y asignando a cada región una nota.

10.1.1. Uso del programa

En la figura 22 se muestra una pantalla del programa. Con las teclas `F1` a `F10` se selecciona el tipo de atractor extraño a utilizar. Cada fractal depende de uno o más parámetros libres (por ejemplo, el parámetro F_0 de la ecuación forzada de Duffing). Pulsando la tecla `Enter` el fractal se repinta sin cambiar el valor de estos parámetros. Al pulsar la barra espaciadora, sin embargo, el fractal se redibuja pero con unos valores diferentes (aleatorios) de sus parámetros libres.

La tecla `M` activa o desactiva la emisión de la música por el altavoz interno del ordenador. Con las teclas `X` e `Y` se activa o desactiva el uso de la información del eje correspondiente en la obtención de la altura de la nota emitida. Con `W` se comienza la grabación de la melodía, que puede detenerse con una nueva pulsación de la misma tecla. La grabación se realiza sobre un fichero que puede convertirse posteriormente en MIDI con la ayuda de un programa externo, como se indica en la documentación de TWTF.

Las teclas de `Inicio` y `Fin` varían el tempo de la composición. Las teclas de derecha e izquierda permiten elegir entre las diferentes escalas disponibles en el programa y las teclas `RePág` y `AvPág` permiten subir y bajar por la escala elegida.

Para reducir el número de notas generadas el programa introduce un factor de compresión, ajustable mediante la tecla `Control` y las flechas de arriba y abajo. Cuando el factor de compresión es n, solo uno de cada n puntos del atractor se llevan a la melodía. Con `Control` y el `5` del teclado numérico se consigue que se marquen en pantalla, rodeados con un círculo blanco, los puntos utilizados en la melodía.

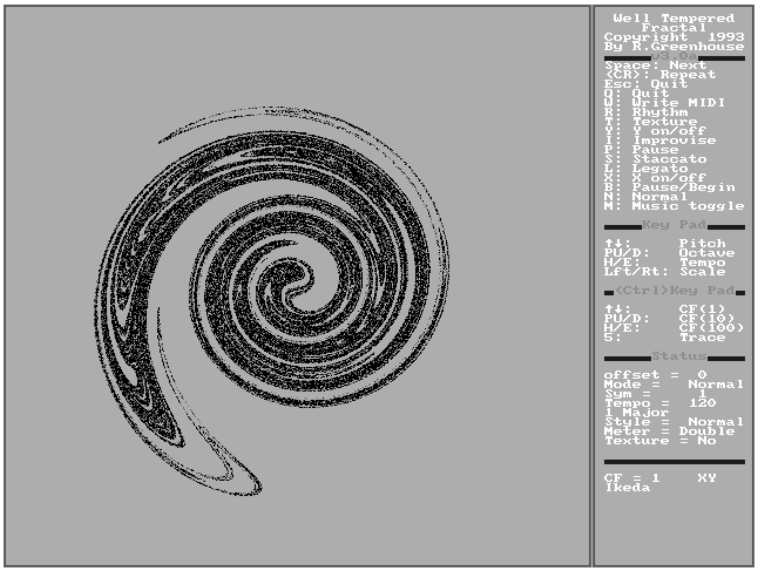


Figura 22: Pantalla del programa The Well Tempered Fractal.

De igual manera, para introducir cierta estructura en la melodía, el programa cuenta con una serie de operadores de simetría (activables con las teclas del `1` al `9`) que imponen un orden adicional sobre la configuración del atractor correspondiente.

11. El sonido de los sistemas L

Mediante la sucesiva aplicación de las reglas de derivación un sistema L genera una cadena, como ya se vió en la sección 5. Esta cadena puede ahora «interpretarse» de distintas formas. Una posibilidad, ya discutida, es la interpretación de los símbolos como pautas de movimiento de una tortuga gráfica; con ello es fácil representar numerosas curvas fractales.

Otra posibilidad es interpretar la cadena en términos músicales, de manera que a cada símbolo le corresponda la generación de un determinado tono, acorde, duración o timbre.

Una posibilidad a medio camino entre las dos anteriores, es generar música a partir de un conjunto fractal generado gráficamente mediante un sistema L. Esto es lo que hace Gary Lee Nelson en su composición para solo de flauta *Summer song* [16]. Este trabajo se basa en un sistema L similar al mostrado en el sistema Γ_5 de la página 28 para la curva de Hilbert, pero con un ángulo de 101 grados y no de 90. El conjunto resultante se deforma

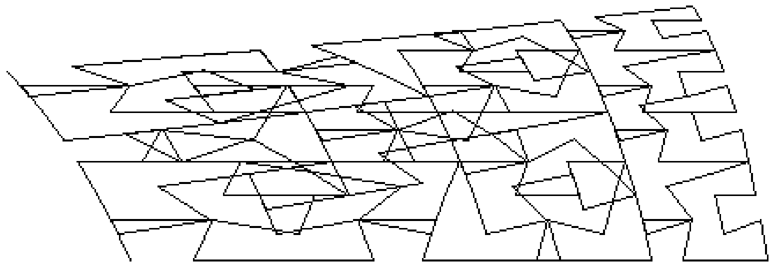


Figura 23: La curva de Hilbert deformada utilizada por Gary Lee Nelson en «Summer song» (1991).

mediante unas transformaciones de escalado y rotación para obtener una curva como la de la figura 23.

La coordenada vertical de cada vértice (ajustada sobre una escala) se interpreta como la altura y la longitud de la recta entre dos vertices consecutivos como la duración (también ajustada a un conjunto de valores estándar).

11.1. El programa LMuse

LMuse [20] interpreta sistemas L. Los sistemas L, como se vió, reescriben recursivamente una cadena de símbolos según un conjunto de reglas de transformación. La secuencia resultante se interpreta en LMuse como una serie de órdenes para una tortuga que dibuja conforme se mueve, pero que también escribe música. En la figura 24 se muestra una imagen del programa.

Los movimientos de la tortuga se hacen corresponder con variaciones en la altura. La longitud de cada trazo determina la duración de la nota y el grosor de la línea, el volumen. El color determina el intrumento utilizado y las ramas, que aparecen como resultado del uso de la pila, generan polifonías.

Los sistemas L con los que permite trabajar el programa pueden tener reglas estocásticas y dependientes del contexto. Las reglas se almacenan en ficheros de texto con un formato específico.

11.1.1. Uso del programa

La mayor parte de las acciones del programa se pueden llevar a cabo desde los botones situados en la pantalla principal o desde el menú `Production`. La opción `Load, Make and Interpret` lee un fichero de reglas, genera una cadena para el número de niveles indicado, y la representa gráfica y musi-

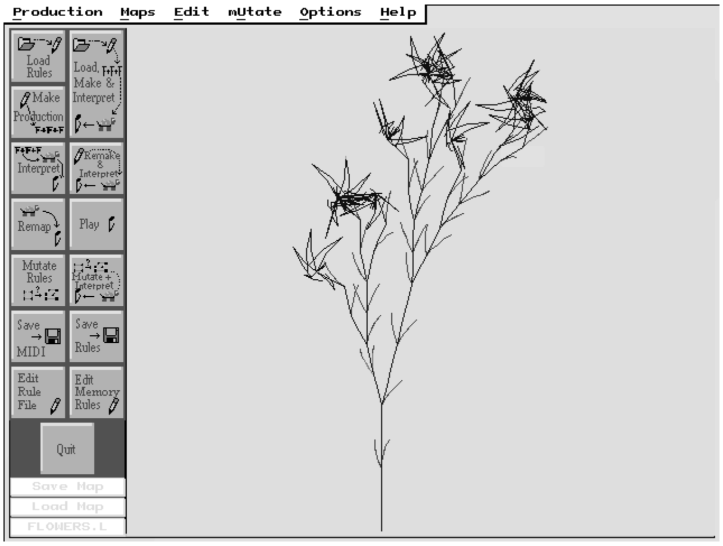


Figura 24: Pantalla del programa LMuse.

calmente. Con `Remake and Interpret` se genera una nueva cadena (que no necesariamente ha de ser la misma debido a la estocasticidad de las reglas) y se vuelve a interpretar.

La opción `Save MIDI` del menú `Production` graba un MIDI con la melodía producida. Con las opciones del menú `Mutate` pueden introducirse mutaciones aleatorias en las reglas.

Para terminar, desde el menú `Map` se puede configurar con qué parámetros se corresponden la duración, la altura y el volumen, o qué escala se va a utilizar.

12. El sonido del conjunto de Mandelbrot

La idea tras la utilización del conjunto de Mandelbrot como generador de música fractal es idéntica a la discutida en el caso de los atractores extraños en la sección 10. Se trata, por tanto, de tomar un punto z del plano complejo e iterar sobre él la ecuación $f(z) = z^2 + c$. Esta iteración producirá una secuencia de puntos complejos a los que se aplicará una determinada transformación que los convierta en notas músicales. Cuando el módulo del punto de la trayectoria sea superior a 2 (condición que como vimos garantiza que la trayectoria escapará al infinito), la trayectoria y la melodía comenzarán de nuevo desde el punto inicial.

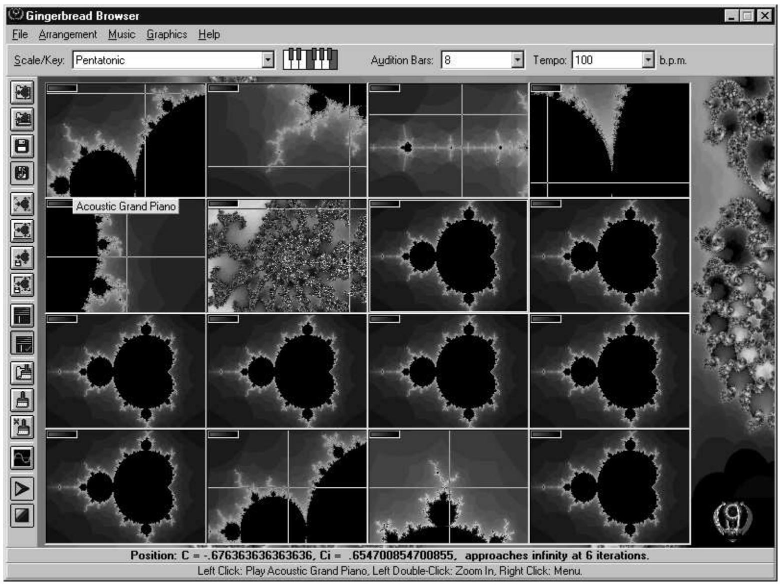


Figura 25: Ventana del programa Gingerbread.

A partir de esta sencilla idea no es complicado confeccionar un programa que permita «escuchar» el conjunto de Mandelbrot. El programa Gingerbread va más allá, sin embargo, y presenta tal cantidad de posibilidades y efectos que los resultados obtenidos se enriquecen enormemente. Existen, no obstante, muchas otras formas de convertir en sonido el conjunto de Mandelbrot [22, 23].

12.1. El programa Gingerbread

El autor del programa asegura que Gingerbread [21] permite crear música a cualquiera. Sin necesidad de tener conocimientos de matemáticas o de música, se puede componer desde música pop a clásica, pasando por bandas sonoras de películas o fondos sonoros para páginas web. El autor asegura que el material disponible para la composición es infinito y define la música fractal como una forma especial de composición en la que el usuario no inventa la música que escucha, sino que la descubre.

En la figura 25 se muestra la ventana principal del programa Gingerbread. El programa muestra simultáneamente en pantalla 16 imágenes del conjunto de Mandelbrot, cada una de ellas asociada a un canal MIDI.

En general, las áreas del conjunto de Mandelbrot con más detalles son las que producen las mejores melodías. Los puntos del interior de la cardioide (los verdaderos elementos del conjunto de Mandelbrot) suelen llegar rápidamente a un atractor y la música se estabiliza y se hace monótona. Las zonas más alejadas de la cardiode divergen rápidamente a infinito y hacen que el programa solo genere unas pocas notas antes de volver a repetirlas. Es aconsejable, en definitiva, explorar las zonas cercanas a la frontera del conjunto de Mandelbrot.

12.1.1. Uso del programa

Haciendo clic sobre un punto de uno de los fractales se escucha la melodía correspondiente a la trayectoria de ese punto según la fórmula iterativa del conjunto de Mandelbrot. Haciendo doble clic sobre una zona del fractal, esta se amplía y muestra nuevos detalles del conjunto.

Cuando nos guste la melodía producida por la trayectoria de un punto, podemos almacenar el valor de sus coordenadas. Para ello, pulsamos el botón derecho del ratón sobre el fractal en cuestión y seleccionamos la opción `Store Coordinate`. Estas acciones pueden repetirse sobre cualquiera de los 16 conjuntos de Mandelbrot disponibles. Si elegimos `Play All Stored Instruments` en el menú contextual que aparece al hacer clic con el botón derecho del ratón, escucharemos simultáneamente los sonidos de todos los puntos cuyas coordenadas hayan sido almacenadas.

El menú contextual ofrece acceso a muchas de las opciones del programa. La opción `Edit Style` es una de las más sorprendentes e importantes: desde ella podemos cambiar el instrumento, la velocidad de la melodía, añadir acordes y mucho más. A continuación se describe brevemente las distintas fichas que aparecen dentro de esta opción.

Base Notes. Permite escoger el rango de notas sobre el que se proyectarán los datos fractales.

Volumen/Pan. Volumen y distribución en los altavoces del sonido.

Fractal data. Desde aquí se decide si la altura de la nota se toma de la parte real de cada punto de la trayectoria y la duración de la parte imaginaria, o al revés. También puede establecerse que la altura de la nota se tome de una función sobre ambas (por ejemplo, el coseno de su cociente).

Repetitions. Introduce ritmo en la melodía haciendo que cada nota se pueda repetir un número determinado de veces.

Rests. Permite hacer que una nota no suene (silencio) si se cumple una determinada condición sobre el valor complejo del punto correspondiente.

Autochord. Añade acordes. Se puede elegir el tipo de acorde y cuándo se aplica. Si no se indica ninguna condición para este último caso, pueden añadirse también arpegios.

Patch/EFX. Aquí se elige el instrumento y su reverberación, entre otros.

Transpose. Para aplicar una transformación a cada nota en función de otras series caóticas.

Cada estilo definido con las opciones anteriores puede grabarse en un fichero y cargarse en cualquier momento. Desde el menú `File` puede grabarse la composición en un fichero MIDI con la opción `Export MIDI As...`

El tempo de la composición, la escala y la duración de la melodía (esta desde `Audition Bars`) se ajustan desde la ventana principal del programa. Además, es posible definir nuevas escalas o reproducir un fichero wav en segundo plano simultáneamente a la composición.

Gingerbread dispone, además, de varias operaciones gráficas que pueden efectuarse sobre las imágenes de los fractales. Cualquiera de las imágenes puede mostrarse a pantalla completa o grabarse en un archivo. Desde la opción `Colour Scheme` del menú contextual se puede cambiar la paleta de colores utilizada en la representación del conjunto.

13. Conclusiones

La geometría fractal y la teoría del caos han obligado a muchos científicos a observar con otros ojos la complejidad del mundo. Algunos músicos han aplicado esta nueva visión a sus composiciones para producir piezas que desencadenan en los oyentes reacciones de muy diversa índole: desde la fascinación al aburrimiento.

La música fractal se mueve en la frontera entre la monotonía y la sorpresa, entre la aleatoriedad y la predicibilidad. Su complejidad probablemente impida que llegue al gran público, aunque quizás sea demasiado pronto para juzgar una manifestación musical que cuenta con poco más de una década de vida. Tampoco las primeras imágenes del conjunto de Mandelbrot permitían presagiar la belleza de sus simas inacabables.

Referencias

[1] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, 2.ª edición, Academic Press, 1993.

[2] J. Barrallo Calonge, *Geometría fractal: algorítmica y representación*, Anaya Multimedia, 1993.

[3] Gerald Bennett, «Chaos, sel-similarity, musical phrase and form», `http://www.computermusic.ch/files/articles/Chaos,Self-Similarity/Chaos.html`.

[4] J. Blanc–Talon, «Inference of grammars from fractal sets: the inner structure», en *Grammatical Inference*, L. Erlbaum Assoc. Publisher, 1994, Simon Lucas Ed.

[5] Bruno Degazio, «Nikola Tesla and Joseph Schillinger: the music of NT, the man who invented the twentieth century», `http://www-ks.rus.uni-stuttgart.de/people/schulz/fmusic/tesla.html`.

[6] Shawn Bulen, «Self-similarity: theories, musings and observations», `http://ourworld.cs.com/shawnbulen/SelfSimi.htm`.

[7] Glenn Elert, *The chaos hypertext book*, `http://hypertextbook.com/chaos`.

[8] Robert Greenhouse, «The Well-Tempered Fractal 3.0», manual del programa, 1995, `http://www-ks.rus.uni-stuttgart.de/people/schulz/fmusic/wtf`.

[9] Miguel de Guzmán, Miguel Ángel Martín, Manuel Morán, Miguel Reyes, *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor, Barcelona, 1993.

[10] Lars Kindermann, «MusiNum 2.08: the music in the numbers», documentación del programa, 2000, `http://www.forwiss.uni-erlangen.de/~kinderma/musinum/musinum.html`.

[11] Tac Leung, «The music makers», `http://www.discovery.com/stories/technology/fractals/musicmakers.html`.

[12] Benoît Mandelbrot, *Los objectos fractales: forma, azar y dimensión*, 2.ª edición, Tusquets, 1988.

[13] Miguel Ángel Martín, Manuel Morán, Miguel Reyes, *Iniciación al caos: sistemas dinámicos*, Síntesis, Madrid, 1995.

[14] Nicholas Mucherino, «Recursion: a paradigm for future music?», `http://www-ks.rus.uni-stuttgart.de/people/schulz/fmusic/recursion.html`.

[15] Gary Lee Nelson, «Wind, sand and sea voyages: an application of granular synthesis and chaos to musical composition», `http://www.timara.oberlin.edu/people/~gnelson/papers/Gola/gola.htm`.

[16] Gary Lee Nelson, «Real time transformation of musical material with fractal algorithms», `http://www.timara.oberlin.edu/people/~gnelson/papers/fractal/GNfract.htm`.

[17] Antonio Rañada, *Dinámica clásica*, Alianza Editorial, 1990.

[18] Larry Salomon, «The fractal nature of music», `http://community.cc.pima.edu/users/larry/fracmus.htm`.

[19] Joseph Schillinger, «The Schillinger system of musical composition», Da Capo, Nueva York, 1978.

[20] David Sharp, «LMuse 0.7 documentation», manual del programa, `http://www.geocities.com/Athens/Academy/8764/lmuse/lmuse.html`.

[21] Phil Thompson, «Gingerbread: the Mandelbrot music generator», documentación del programa, `http://www.organised-chaos.com/oc/ginger/ginger.html`.

[22] «Hearing the Mandelbrot set», `http://members.aol.com/dshp3/mandelmaps.html`.

[23] «How to compose Mandelbrot music», `http://www.fin.ne.jp/~yokubota/composee.shtml`.